

Normális eloszlás

(A normális eloszlást leíró sűrűségfüggvény vizsgálata.)

A sűrűségfüggvény:

$$\#1: \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \text{EXP} \left[ - \frac{(x - m)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]$$

Az sűrűségfüggvény 1. deriváltja:

$$\#2: \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \text{EXP} \left[ - \frac{(x - m)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right] \right)$$

$$\#3: \frac{\sqrt{2 \cdot e} \cdot \left( - \frac{x}{\sigma^2} + \frac{m \cdot x}{\sigma^2} - \frac{m}{\sigma^2} \right) \cdot (m - x)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^3}}$$

1. derivált zérushelyeinek keresése:

(Az sűrűségfüggvény lehetséges szélsőérték helyei.)

$$\#4: \text{SOLVE} \left( \frac{\sqrt{2 \cdot e} \cdot \left( - \frac{x}{\sigma^2} + \frac{m \cdot x}{\sigma^2} - \frac{m}{\sigma^2} \right) \cdot (m - x)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^3}}, x \right)$$

$$\#5: x = \pm \infty \vee x = - \infty \cdot \text{SIGN}(m) \vee x = m$$

A sűrűségfüggvény lehetséges szélsőértéke:

$$\#6: \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma}}$$

A sűrűségfüggvény 2. deriváltja:

$$\#7: \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{2 \cdot e} \cdot \left( - \frac{x}{\sigma^2} + \frac{m \cdot x}{\sigma^2} - \frac{m}{\sigma^2} \right) \cdot (m - x)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^3}}$$

$$\#8: \frac{\sqrt{2 \cdot e} \cdot \left( - \frac{x}{\sigma^2} + \frac{m \cdot x}{\sigma^2} - \frac{m}{\sigma^2} \right) \cdot \left( x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - \sigma^2 \right)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^3}}$$

$$2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^5}$$

2. derivált zérushelyei:

(A sűrűségfüggvény lehetséges inflexiós pont helyei.)

$$\#9: \text{ SOLVE } \left( \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} + m \cdot x / \sigma - \frac{m^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot (x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - \sigma^2)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^5}} \right) \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right) \text{ -, x, Real}$$

$$\#10: \quad x = \pm \infty \vee x = m - \sigma \vee x = m + \sigma$$

A 2. derivált az első zérushelyén:

(Annak eldöntése, hogy a sűrűségfüggvénynek valóban van-e szélsőértéke, és az milyen.)

$$\#11: \quad - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sigma^3}}$$

Az eloszlásfüggvény integrálja a valós számok halmazán:

$$\#12: \quad \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \text{EXP} \left( - \frac{(t - m)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) dt$$

$$\#13: \quad \text{SIGN}(\sigma)$$

Az eloszlásfüggvény:

(Elemi függvényekkel nem fejezhető ki.)

$$\#14: \quad \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \text{EXP} \left( - \frac{(t - m)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) dt$$

Standard eset:

(m=0, szigma=1)

A sűrűségfüggvény:

$$\#15: \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-x/2}}{2 \cdot \sqrt{\pi}}$$

Az eloszlásfüggvény:

$$\#16: \frac{\text{ERF}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{2}\right) + 1}{2}$$

Az standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének (fekete) és eloszlásfüggvényének (piros) grafikonjai:

