Merõleges érintõk

Adott egy hiperbola az egyenletével. Mi azon pontok halmaza a hiperbola síkjában, amelyekből a hipebola derékszög alatt látszik?

A hiperbola egyenlete:
(Paramáteresen dolgozunk.)

#1: $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Egy tetszõleges pont a síkban:

#2: $[p, q]$

A ponton átmenõ tetszõleges egyenes egyenlete:

#3: $y - q = m\cdot(x - p)$

Az egyenes és a hiperbola közös pontjai:
(egyenletrendszer megoldása)

#4: $$\mathrm{SOLVE}\left(\left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y - q = m\cdot(x - p)\right], [x, y]\right)$$

#5: $$\left[\frac{a\cdot(b\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2 + b^2 + m^2\cdot p^2 - 2\cdot m\cdot p\cdot q + q^2)} + a\cdot m\cdot(q - m\cdot p))}{b^2 - a^2\cdot m^2},\ \frac{b\cdot(a\cdot m\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2 + b^2 + m^2\cdot p^2 - 2\cdot m\cdot p\cdot q + q^2)} + b\cdot(m\cdot p - q))}{a^2\cdot m^2 - b^2}\right]$$

#6: $$\left[\frac{a\cdot(b\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2 + b^2 + m^2\cdot p^2 - 2\cdot m\cdot p\cdot q + q^2)} + a\cdot m\cdot(q - m\cdot p))}{b^2 - a^2\cdot m^2},\right.$$

$$\left.\frac{b\cdot(a\cdot m\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+m^2\cdot p^2-2\cdot m\cdot p\cdot q+q^2)}+b\cdot(q-m\cdot p))}{b^2-a^2\cdot m^2}\right]$$

Érintõ esetében a közös pontok egyenlõk.
(egyenletrendszer megoldás)

#7: $$\left[\frac{a\cdot(b\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+m^2\cdot p^2-2\cdot m\cdot p\cdot q+q^2)}+a\cdot m\cdot(q-m\cdot p))}{b^2-a^2\cdot m^2},\right.$$

$$\left.\frac{b\cdot(a\cdot m\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+m^2\cdot p^2-2\cdot m\cdot p\cdot q+q^2)}+b\cdot(m\cdot p-q))}{a^2\cdot m^2-b^2}\right]$$

$$=$$

$$\left[\frac{a\cdot(b\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+m^2\cdot p^2-2\cdot m\cdot p\cdot q+q^2)}+a\cdot m\cdot(q-m\cdot p))}{b^2-a^2\cdot m^2},\right.$$

$$\left.\frac{b\cdot(a\cdot m\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+m^2\cdot p^2-2\cdot m\cdot p\cdot q+q^2)}+b\cdot(q-m\cdot p))}{b^2-a^2\cdot m^2}\right]$$

#8: $a^2\cdot m^2-m^2\cdot p^2-b^2+q\cdot(2\cdot m\cdot p-q)=0$

#9: $\mathrm{SOLVE}(a^2\cdot m^2-m^2\cdot p^2-b^2+q\cdot(2\cdot m\cdot p-q)=0,\ m)$

#10: $$m=\frac{\sqrt{(a^2\cdot(b^2+q^2)-b^2\cdot p^2)}-p\cdot q}{a^2-p^2}\ \vee\ m=$$

$$\frac{\sqrt{(a^2\cdot(b^2+q^2)-b^2\cdot p^2)}+p\cdot q}{}$$

$$p^2 - a^2$$

Ha merõlegesek az érintõk, a meredekségek szorzata −1.
(egyenlet megoldás)

#11: $$\frac{\sqrt{a^2\cdot(b^2 + q^2) - b^2\cdot p^2} - p\cdot q}{a^2 - p^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2\cdot(b^2 + q^2) - b^2\cdot p^2} + p\cdot q}{p^2 - a^2} =$$

$$-1$$

#12: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{\sqrt{a^2\cdot(b^2 + q^2) - b^2\cdot p^2} - p\cdot q}{a^2 - p^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2\cdot(b^2 + q^2) - b^2\cdot p^2} + p\cdot q}{p^2 - a^2} = -1, [p, q]\right)$$

#13: $$p^2 + q^2 = a^2 - b^2 \wedge p^2 \neq a^2$$

A #13 egyenlet egy kor egyenlete. (Vezérkör)