

Merőleges érintők

Adott egy ellipszis az egyenletével. Mi azon pontok halmaza az ellipszis síkjában, amelyekből az ellipszis derékszög alatt látszik?

Az ellipszis:

$$\#1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Az (u,v) ponton átmenő összes egyenes egyenlete. (Az y tengellyel párhuzamos egyenes kivételével.)

$$\#2: y - v = m \cdot (x - u)$$

Az egyenes és az ellipszis közös pontjainak keresése, az #1 és #2 egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$\#3: y = m \cdot x - m \cdot u + v$$

$$\#4: \frac{x^2 \cdot (25 \cdot m^2 + 16) + 50 \cdot m \cdot x \cdot (v - m \cdot u) + 25 \cdot (m^2 \cdot u^2 - 2 \cdot m \cdot u \cdot v + v^2)}{400} =$$

1

$$\#5: x = \frac{5 \cdot (5 \cdot m \cdot (m \cdot u - v) - 4 \cdot \sqrt{(m^2 \cdot (25 - u^2) + 2 \cdot m \cdot u \cdot v - v^2 + 16)})}{25 \cdot m^2 + 16} \cdot v$$

$$x = \frac{5 \cdot (4 \cdot \sqrt{(m^2 \cdot (25 - u^2) + 2 \cdot m \cdot u \cdot v - v^2 + 16}) + 5 \cdot m \cdot (m \cdot u - v))}{25 \cdot m^2 + 16}$$

Az érintés esetében egy közös pont van. Az x -re kapott két megoldás egyenlő. (egyenlet megoldás)

$$\#6: \frac{5 \cdot (5 \cdot m \cdot (m \cdot u - v) - 4 \cdot \sqrt{(m^2 \cdot (25 - u^2) + 2 \cdot m \cdot u \cdot v - v^2 + 16)})}{25 \cdot m^2 + 16} =$$

$$\frac{25 \cdot m^2 + 16}{5 \cdot (4 \cdot \sqrt{(m^2 \cdot (25 - u^2) + 2 \cdot m \cdot u \cdot v - v^2 + 16)} + 5 \cdot m \cdot (m \cdot u - v))}$$

$$\frac{25 \cdot m^2 + 16}{\sqrt{(16 \cdot u^2 + 25 \cdot (v^2 - 16)) - u \cdot v}} \quad \vee \quad m = \frac{\sqrt{(16 \cdot u^2 + 25 \cdot (v^2 - 16)) + u \cdot v}}{u^2 - 25}$$

A merőlegesség feltétele, hogy a meredekségek szorzata -1 .

$$\frac{\sqrt{(16 \cdot u^2 + 25 \cdot (v^2 - 16)) - u \cdot v}}{25 - u^2} \cdot \frac{\sqrt{(16 \cdot u^2 + 25 \cdot (v^2 - 16)) + u \cdot v}}{u^2 - 25} =$$

-1

$$\frac{v^2 - 16}{u^2 - 25} = -1$$

$$\frac{v^2 - 16}{v^2 - 16} = \frac{25 - u^2}{25 - u^2}$$

$$u^2 + v^2 = 41$$

A kapott egyenlet egy kör egyenlete, melynek középpontja az origó, és sugara a 41 négyzetgyöke.

$$x^2 + y^2 = 41$$

